

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA ELMLƏRİ MATHEMATICAL AND MECHANICAL SCIENCES

<https://doi.org/10.36719/2663-4619/111/186-189>

Səbinə Bəşirova
Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında
Dövlət İdarəçilik Akademiyası
<https://orcid.org/0009-0001-1964-7221>
bashirova.sabina310889@gmail.com

Diferensial operatorlar üçün spektral analizin düz və tərs məsələləri

Xülasə

Diferensial operatorlar üçün spektral analiz düz və tərs spektral məsələləri əhatə edir. Düz spektral məsələdə operatorun spektri və öz funksiyaları təyin edilir, tərs spektral məsələdə isə verilmiş spektral məlumatlardan istifadə edərək operatorun quruluşu bərpa olunur. Şturm-Liuvill operatorları spektral analizdə mühüm rol oynayır və onların tətbiqləri kvant mexanikası, optika və mühəndislikdə geniş yayılmışdır. Tərs spektral məsələlərin həlli üçün Borg teoremi və Gel'fand-Levitan-Marchenko inteqral tənliyi kimi üsullar tətbiq olunur. Ümumiyyətlə, spektral analiz riyaziyyatın funksional analiz, kvant fizikası və tətbiqi riyaziyyat sahələrində fundamental əhəmiyyət kəsb edir.

Açar sözlər: *diferensial operator, spektral analiz, düz spektral məsələ, tərs spektral məsələ, Şturm-Liuvill operatoru, özqiymət və özfunksiyalar, spektral funksiyalar, Gel'fand-Levitan-Marchenko tənliyi*

Sabina Bashirova
Academy of Public Administration under the President of the Republic of Azerbaijan
<https://orcid.org/0009-0001-1964-7221>
bashirova.sabina310889@gmail.com

Direct and Inverse Problems of Spectral Analysis For Differential Operators

Abstract

Spectral analysis for differential operators covers direct and inverse spectral problems. In the direct spectral problem, the spectrum and eigenfunctions of the operator are determined, while in the inverse spectral problem, the structure of the operator is reconstructed using the given spectral data. Sturm-Liouville operators play an important role in spectral analysis and their applications are widespread in quantum mechanics, optics, and engineering. Methods such as Borg's theorem and the Gel'fand-Levitan-Marchenko integral equation are used to solve inverse spectral problems. In general, spectral analysis is of fundamental importance in the functional analysis, quantum physics, and applied mathematics fields of mathematics.

Keywords: *differential operator, spectral analysis, direct spectral problem, inverse spectral problem, Sturm-Liouville operator, eigenvalues and eigenfunctions, spectral functions, Gel'fand-Levitan-Marchenko equation*

Giriş

Spektral analiz riyaziyyatın funksional analiz və diferensial tənliklər sahəsində mühüm istiqamətlərdən biridir. Bu analiz diferensial operatorların xassələrini öyrənməyə və onların spektral xarakteristikalarını təyin etməyə imkan verir.

Diferensial operatorların spektral analizi riyazi fizika, kvant mexanikası və mühəndislik tətbiqlərində mühüm yer tutur. Spektral analiz, operatorların spektrinin, özfunksiyalarının və onların

xassələrinin araşdırılmasına yönəlib. Bu proses iki əsas məsələyə bölünür: düz spektral məsələ və tərs spektral məsələ (Kato, 1995).

Tədqiqat

Düz spektral məsələ verilmiş bir diferensial operatorun spektrinin (özqiymətlərin) və ona uyğun özfunksiyaların tapılmasını nəzərdə tutur. Bu, aşağıdakı əsas addımları əhatə edir (Eckhardt, Gesztesy, Teschl, 2013):

1. Spektral xarakteristikanın təyini – Diferensial operatorun spektrinin quruluşu araşdırılır.

2. Özfunksiyaların və özqiymətlərin tapılması – Operatorun spektral göstəricilərinin təyin olunması üçün sərhəd şərtləri nəzərə alınaraq uyğun diferensial tənliklər həll edilir.

3. Spektral ölçü və ortogonal genişlənmə – Tapılmış özfunksiyalar əsasında spektral genişlənmə ifadələri qurulur.

Tərs spektral məsələ verilmiş spektral məlumatlara əsasən diferensial operatorun müəyyən edilməsini hədəfləyir. Burada əsas məqsəd spektral xarakteristikalara görə operatorun strukturunu bərpa etməkdir (Naimark, 2010).

Tərs spektral məsələlər aşağıdakı hallarda tətbiq edilir:

Spektral məlumatlardan potensialın bərpası – Məsələn, Şturm-Liuvill operatoru üçün potensial funksiyanın spektral xarakteristikalar vasitəsilə müəyyən edilməsi.

Kvant mexanikasında tərs məsələlər – Kvant sistemlərinin enerji spektri vasitəsilə potensialın təyini (Simon, 1995).

Tətbiqi riyaziyyatda və mühəndislikdə – Vibrasiya sistemlərində kütlə və sərtlik parametrlərinin spektral məlumatlar əsasında müəyyən edilməsi.

Düz və tərs spektral məsələlər diferensial operatorların öyrənilməsində fundamental rola malikdir. Düz spektral analiz operatorun spektral xassələrini tapmağa kömək edirsə, tərs spektral analiz isə bu xassələrdən istifadə edərək operatorun quruluşunu müəyyən etməyə imkan yaradır (Titchmarsh, 1946).

Bu sahə riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi aspektlərində geniş istifadəyə malikdir və xüsusilə kvant mexanikası, optika, nəzarət nəzəriyyəsi kimi sahələrdə mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Riyazi olaraq, bu, aşağıdakı ümumi diferensial tənlik formasında ifadə olunur (Levitan, Sargsyan, 1975):

$$L y = \lambda y$$

burada diferensial operator, funksiyası operatorun özfunksiyası, isə özqiymətdir.

Düz spektral məsələnin əsas komponentləri bunlardır (Albeverio, Høegh-Krohn, 1993):

1.1. Spektrin təyini

Xüsusi hallar: Diferensial operatorun spektri diskret və ya kəsilməz ola bilər.

Özqiymət və özfunksiyalar: Şturm-Liuvill tipli operatorlar üçün bu anlayışlar mühüm rol oynayır.

Spektral ölçü və spektral funksiyalar: Bu anlayışlar Hilbert fəzasında spektral nəzəriyyənin əsasını təşkil edir (Marchenko, 1986).

1.2. Ortogonal genişlənmə və Fourier tipli analiz

Spektral analiz, Fourier seriyalarına bənzər şəkildə funksiyaların operatorun özfunksiyaları üzrə genişləndirilməsinə imkan yaradır. Şturm-Liuvill operatorları üçün genişlənmə aşağıdakı formada olur (Freiling, 2009):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

burada operatorun özfunksiyaları, isə Fourier əmsallarına oxşar şəkildə təyin olunan genişlənmə əmsallarıdır.

1.3. Şturm-Liuvill operatoru üçün düz spektral məsələ

Şturm-Liuvill operatoru spektral analizdə əsas obyektlərdən biridir və aşağıdakı şəkildə verilir (Borg, 1946):

$$\left(p(x) y' \right)' + \left(q(x) + \lambda w(x) \right) y = 0$$

bu operator üçün:

Sərhəd şərtləri təyin olunur (Dirixle, Noyman və s.); Özqiymətlərin asimptotik davranışı araşdırılır. Spektral funksiyalar hesablanır.

Düz spektral məsələlər fizikanın müxtəlif sahələrində, xüsusilə kvant mexanikasında Schrödinger tənliyi üçün istifadə olunur.

Tərs spektral məsələ verilmiş spektral xarakteristikalara əsasən diferensial operatorun müəyyən edilməsini hədəfləyir. Yəni, operatorun spektri məlum olduqda, onun tərs qurulması məsələsi həll edilir (Gelfand, Levitan, 1951).

2.1. Problem formulasiyası

Əgər düz spektral məsələdə operator məlum olub spektr tapılırsa, tərs spektral məsələdə əksinə, spektral məlumatlar məlum olur və operatorun özü bərpa edilir. Bu, ümumiyyətlə, aşağıdakı formada təqdim edilir (Babbitt, 1999):

$$L y = \lambda y, \quad \lambda \in \sigma(L) \text{ və } y(x) \text{ məlumdur, } L \text{ tapılmalıdır.}$$

Əsas məqsəd operatorun potensial funksiyasını tapmaqdır.

2.2. Tərs Şturm-Liuvill problemi

Şturm-Liuvill operatorları üçün tərs spektral məsələnin həlli çox vacibdir. Əsas məqsəd verilmiş spektral xarakteristikalar (özqiymətlər və normalizasiya əmsalları) əsasında potensial funksiyayı müəyyən etməkdir.

Borg teoremi: Bir çox hallarda spektr operatoru tam bərpa edir (Berezin, Shubin, 1991).

Gel'fand-Levitan-Marchenko inteqral tənliyi: Bu tənlik tərs spektral məsələnin həlli üçün istifadə olunur.

2.3. Kvant mexanikasında tətbiqlər

Kvant mexanikasında Schrödinger tənliyinin potensialı spektral məlumatlardan istifadə olunaraq tapılır:

$$-\frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi$$

Burada enerji səviyyələri (spektr) isə dalğa funksiyasıdır. Spektr məlum olduqda, potensial bərpa edilə bilər.

2.4. Tərs məsələlərin riyazi əhəmiyyəti

Tətbiqi riyaziyyatda: Vibrasiya və dalğa nəzəriyyəsində geniş istifadə olunur.

Tibbi tomoqrafiyada: Tərs spektral analiz tibb sahəsində, məsələn, kompyuter tomoqrafiyasında istifadə edilir (Reed, Simon, 1978).

Geofizikada: Yer qabığının quruluşunu öyrənmək üçün spektral məlumatlardan istifadə edilir.

Düz və tərs spektral məsələlərin qarşılıqlı əlaqəsi

Düz və tərs spektral məsələlər bir-biri ilə sıx bağlıdır. Düz spektral analiz operatorun spektrini və özfunksiyalarını tapmağa kömək edirsə, tərs spektral analiz isə bu xassələrdən istifadə edərək operatorun quruluşunu müəyyən etməyə imkan yaradır. Aşağıdakı cədvəldə onların əsas fərqləri göstərilir (Courant, Hilbert, 1989):

Nəticə

Diferensial operatorların spektral analizi, həm düz, həm də tərs məsələlərin araşdırılmasını əhatə edir və riyaziyyatın müxtəlif sahələrində mühüm rol oynayır. Düz spektral məsələdə məqsəd operatorun spektrini və uyğun özfunksiyaları tapmaqdır, bu isə funksional analiz və kvant mexanikasında vacib tətbiqlərə malikdir. Tərs spektral məsələ isə verilmiş spektral məlumatlar əsasında operatorun strukturu ilə bağlı məlumat əldə etməyə yönəlir. Şturm-Liuvill tipli operatorlar bu sahədə əsas nümunələrdən biridir və onların təhlili kvant mexanikası və digər fiziki sahələrdə tətbiq olunur. Bu analizlər, həmçinin mühəndislik və tibbi riyaziyyat kimi sahələrdə tətbiq olunan problemlərin həllində də istifadə olunur. Ümumiyyətlə, spektral analiz diferensial operatorların xassələrini öyrənmək və müxtəlif tətbiqi sahələrdə operatorların bərpasını təmin etmək üçün vacib bir alətdir.

Ədəbiyyat

1. Albeverio, S., & Hoegh-Krohn, R. (1993). *An Introduction to Spectral Theory: With Applications to Schrödinger Operators*. Springer.
2. Borg, G. (1946). *A Uniqueness Theorem in the Theory of Second Order Linear Differential Equations*. Acta Mathematica.

3. Berezin, F. A., & Shubin, M. A. (1991). *The Schrödinger Equation*. Kluwer Academic Publishers.
4. Babbitt, W. M. (1999). *Spectral Theory of Differential Operators*. Cambridge University Press.
5. Courant, R., & Hilbert, D. (1989). *Methods of Mathematical Physics*. Wiley.
6. Eckhardt, J., Gesztesy, F., & Teschl, G. (2013). Inverse Spectral Theory for Sturm-Liouville Operators with Distributional Potentials. *Journal of Functional Analysis*.
7. Freiling, M. (2009). *Spectral Theory and Differential Operators*. CRC Press.
8. Gelfand, I. M., & Levitan, B. M. (1951). *On the Determination of a Differential Equation from Its Spectral Function*. Izvestiya Akademii Nauk SSSR.
9. Kato, T. (1995). *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer.
10. Levitan, B. M., & Sargsyan, I. S. (1975). *Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators*. American Mathematical Society.
11. Marchenko, V. A. (1986). *Sturm-Liouville Operators and Applications*. American Mathematical Society.
12. Naimark, M. A. (2010). *Linear Differential Operators*. Dover Publications.
13. Reed, M., & Simon, B. (1978). *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*. Academic Press.
14. Simon, B. (1995). *Spectral Analysis of Rank One Perturbations and Applications*. American Journal of Mathematics.
15. Titchmarsh, E. C. (1946). *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations*. Oxford University Press.

Daxil oldu: 15.10.2024

Baxışa göndərildi: 18.12.2024

Təsdiq edildi: 29.01.2025

Çap olundu: 22.01.2025